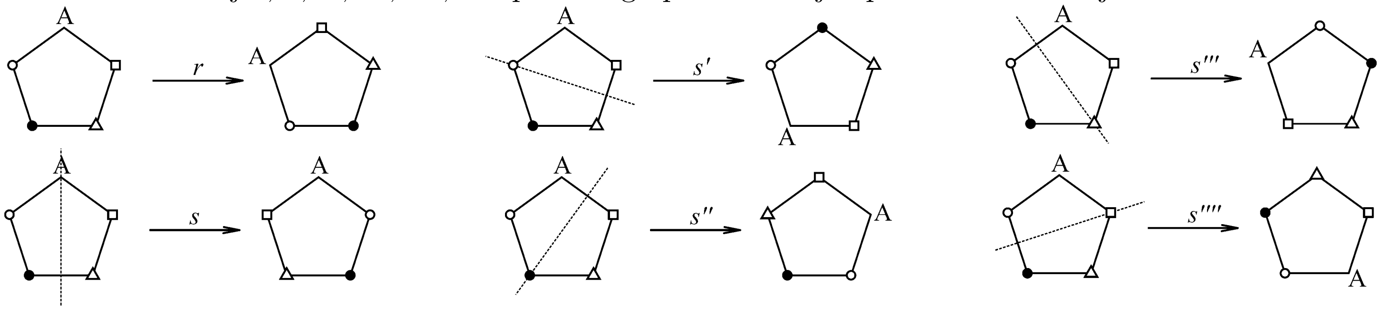
4 Podgrupe generirane z množico elementov in nekatere lastnosti cikličnih podgrup

1. Šest simetrij r, s, s', s'', s''', s'''' pravilnega petkotnika je opisanih z naslednjimi slikami.



Simetrije s', s'', s''', s'''', $s's''''$ in $s'''s''$ izrazi s simetrijami r in s.

[$s' = sr^3 = r^2s$, $s'' = sr = r^4s$, $s''' = sr^4 = rs$, $s'''' = sr^2 = r^3s$, $s's'''' = r^4$, $s'''s'' = r^2$]

Spomnimo se: Grupa G je ciklična, če obstaja $a \in G$ tako, da je vsak element grupe G enak neki potenci elementa a. Element a imenujemo generator grupe G.

Definicija ($\langle M \rangle$)
Naj bo G grupa in naj bo $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$. Podgrupa, generirana z M (oznaka $\langle M \rangle$) je najmanjša podgrupa grupe G, ki vsebuje M. Elemente množice M imenujemo generatorji grupe $\langle M \rangle$.

Podgrupo $\langle M \rangle$ lahko definiramo takole: Naj bo $M \subseteq G$ neka podmnožica v grupi G. Najmanjša podgrupa v G, ki vsebuje M, je

$$\langle M \rangle = \bigcap \{H \leq G : M \subset H\}$$

Množica M generira grupo G, če velja $\langle M \rangle = G$.

Opomba. Če je G ciklična grupa, potem obstaja M moči 1, ki generira G. Če je $M = \{a\}$ potem namesto $\langle \{a\} \rangle$ pišemo $\langle a \rangle$.
Če $M = \{a, b\}$ potem namesto $\langle \{a, b\} \rangle$ pišemo $\langle a, b \rangle$. Če je $M = \{a, b, ..., c\}$, potem namesto $\langle \{a, b, ..., c\} \rangle$ pišemo $\langle a, b, ..., c \rangle$.

2. Dana je grupa $D_5 = \{e, r = R_{72}, r^2, r^3, r^4, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}$ (grupa vseh simetrij pravilnega petkotnika glede na operacijo kompozicije - ta grupa je znana pod imenom diederska grupa reda 10). Dana je tudi njena Cayley-eva tabela (tabela levo).
(a) Določi vse ciklične podgrupe grupe D_5.
(b) Določi $\langle r, s \rangle$, $\langle r^2, rs \rangle$, $\langle r, r^3 \rangle$, $\langle rs, r^3s \rangle$ in $\langle r^2s, r^4s \rangle$.
(c) Določi vse podgrupe grupe D_5.

	e	r	r^2	r^3	r^4	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
e	e	r	r^2	r^3	r^4	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
r	r	r^2	r^3	r^4	e	rs	r^2s	r^3s	r^4s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	e	r	r^2s	r^3s	r^4s	s	rs
r^3	r^3	r^4	e	r	r^2	r^3s	r^4s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	e	r	r^2	r^3	r^4s	s	rs	r^2s	r^3s
s	s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	e	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^4s	r^3s	r^2s	r	e	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^4s	r^3s	r^2	r	e	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^4s	r^3	r^2	r	e	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^4	r^3	r^2	r	e

[$\langle e \rangle = \{e\}$, $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3, r^4\}$, $\langle s \rangle = \{e, s\}$, $\langle rs \rangle = \{e, rs\}$, $\langle r^2s \rangle = \{e, r^2s\}$, $\langle r^3s \rangle = \{e, r^3s\}$, $\langle r^4s \rangle = \{e, r^4s\}$]

3. (a) Dana je grupa $(\mathbb{Z}_{20}, +)$. Določi $\langle 8, 14 \rangle$. Ali je $\langle 2 \rangle = \langle 8, 14 \rangle$? [$\langle 8, 14 \rangle = \{0, 2, 4, ..., 18\} = \langle 2 \rangle$]
(b) Dana je grupa $(\mathbb{Z}, +)$. Določi $\langle 8, 13 \rangle$. [$\langle 8, 13 \rangle = \mathbb{Z}$]
(c) Dana je diederska grupa D_4. Določi $\langle H, V \rangle$ in $\langle R_{90}, V \rangle$.
[$\langle H, V \rangle = \{R_0, R_{180}, H, V\}$, $\langle R_{90}, V \rangle = D_4$]

4. Dana je grupa $\mathbb{C}^*$, grupa vseh neničelnih kopleksnih števil glede na operacijo množenja. Določi $\langle 1, i \rangle$. Ali je $\langle 1, i \rangle = \langle i \rangle$? [$\langle 1, i \rangle = \{1, i, -i, -i\} = \langle i \rangle$]

5. (a) Dana je grupa $(\mathbb{C},+)$. Določi $\langle 1,i\rangle$. $[\langle 1,i\rangle = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}]$
(b) Dana je grupa $(\mathbb{R},+)$. Določi $\langle 2,\pi,\sqrt{2}\rangle$. $[\langle 2,\pi,\sqrt{2}\rangle = \{2a+\pi b + c\sqrt{2} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}\}]$

6. Dana je grupa v kateri a, b, c in d komutirajo. Določi $\langle a,b,c,d\rangle$.
$[\langle a,b,c,d\rangle = \{a^q b^r c^s d^t \mid q,r,s,t\in\mathbb{Z}\}]$

7. Dana je diederska grupa D_n reda $2n$ (grupa vseh simetrij pravilnega n-kotnika glede na operacijo kompozicije) in naj bo R rotacija za $\frac{360}{n}$ stopinj. Določi $\langle R\rangle$.
$[\langle R\rangle = \{e,R,R^2,...,R^{n-1}\}]$

8. Določi grupo ki vsebuje elemente a in b take, da je $|a|=|b|=2$, in da je
(a) $|ab|=3$, $[D_3]$
(b) $|ab|=4$, $[D_4]$
(c) $|ab|=5$. $[D_5]$
Ali lahko kaj povemo o relacijah med $|a|$, $|b|$ in $|ab|$?

9. Določi red grupe G, ki je generirana z dvema elementoma x in y, ki imata naslednjo lastnost: $x^3=y^2=(xy)^2=1$. Napiši vse mogoče podgrupe grupe G.
$[|G|=6,\ G=\{1,x,x^2,y,xy,yx\},\ xy=(xy)^{-1}\Rightarrow xy=yx^2,\ yx=x^2y]$

10. Dan je grupa $(\mathbb{Q},+)$. Pokaži, da to grupo ni mogoče generirati s končno mnogo elementov.
$[\mathbb{Q}=\langle \frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},...,\frac{a_n}{b_n},\rangle$, $\exists c_1,c_2,...,c_n$ t.d. $c_1\frac{a_1}{b_1}+c_2\frac{a_2}{b_2}+...+c_n\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2b_1b_2...b_n}$, $c_1\frac{a_1}{b_1}+c_2\frac{a_2}{b_2}+...+c_n\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_1+A_2+...+A_n}{b_1b_2...b_n}$, $\frac{A}{b_1b_2...b_n}=\frac{1}{2b_1b_2...b_n}$, $A=\frac{1}{2}]$

11. Pokaži, da je $H=\left\{\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ ciklična podgrupa grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. $[\langle\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\rangle = H]$

12. S primerom pokaži, da produkt elementov končnega reda v neabelski grupi ni nujno končnega reda. $[G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ |A|=2,\ |B|=2,\ |AB|=\infty]$

13. Naj bo G ciklična grupa reda 6. Koliko elementov grupe G generira G?
$[\{1,g,g^2,g^3,g^4,g^5\}=G=\langle g\rangle=\langle g^5\rangle]$

14. Naj bo G ciklična grupa reda n. Določi koliko elementov grupe G generira grupo G.
$[1^\circ\ \gcd(i,n)=1,\ 1=ip+nt,\ g=g^{ip},\ g\in\langle g^i\rangle,\ 2^\circ\ \gcd(i,n)=d>1,\ i=sd,\ n=pd,\ (g^i)^p=1,\ |g^i|\leq p<n]$

15. Naj bo G grupa in naj bo $a\in G$ končnega reda. Pokaži, da je $|a|=|\langle a\rangle|$.
$[\langle a\rangle=\{e,a,a^2,...,a^{n-1}\}]$

16. Pokaži, da je vsaka podgrupa ciklične grupe ciklična.
[naj bo H podgrupa, $\exists t>0\ a^t\in H$, naj bo m najmanjši celi t.d. $a^m\in H$, $\langle a^m\rangle=H$]

17. Naj bo $G=\langle a\rangle$ ciklična grupa reda n. Pokaži, da red poljubne podgrupe grupe G deli n.
$[|G|=n,\ H=\langle a^m\rangle,\ n=mk+r,\ r=0,\ n=mk,\ |H|=k]$

18. Naj bo G ciklična grupa reda n, in naj bo r celo število, ki deli n. Pokaži, da G vsebuje natanko eno podgrupo reda r.
$[G=\{1,g,g^2,...,g^{n-1}\},\ n=rp,\ H=\{g^p,g^{2p},...,g^{(r-1)p},g^{rp}=g^n=1\},\ H'=\langle g^k\rangle,\ k=ps,\ H'\subseteq H]$

19. (a) Dokaži, da ima abelska grupa z dvema elementoma reda 2 vedno podgrupo reda 4.
(b) Najdi primer neciklične grupe, v kateri so vse prave podgrupe ciklične.
(c) Naj bo G grupa in naj bo $a\in G$. Dokaži, da je $\langle a^{-1}\rangle=\langle a\rangle$.
(d) Dokaži, da mora biti grupa reda 3 ciklična.

[(a) $|a|=|b|=2,\ G=\{e,a,b,ab\},\ a\neq e,\ b\neq e,\ a\neq ab,\ b\neq ab,\ ab\neq e$]
[(b) $U(8)=\{1,3,5,7\},\ \langle 3\rangle,\ \langle 5\rangle,\ \langle 7\rangle$]
[(c) $\subseteq$: $x\in\langle a^{-1}\rangle,\ x=(a^n)^{-1},\ x\in\langle a\rangle$; $\supseteq$: $x\in\langle a\rangle,\ x=((a^{-1})^n)^{-1},\ x\in\langle a^{-1}\rangle$]